Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (26 сентября 2020 года) 8-9 классы. Краткие решения

1. Доказать, что если $9a^2 + b^2 = 1$, то $-1/6 \le ab \le 1/6$.

Решение. В силу того, что квадрат любого числа неотрицательный, имеем $6ab = (3a + b)^2 - 1 \ge -1$, откуда следует, что $ab \ge -1/6$.
С другой стороны, $6ab = 1 - (3a - b)^2 \le 1$, поэтому $ab \le 1/6$.

---

2. Имеется 32 изумруда разной массы. Можно ли за 35 взвешиваний на чашечных весах без гирь найти два самых тяжёлых изумруда? Ответ обосновать.

Ответ: можно.

Решение. Устроим среди изумрудов соревнование, напоминающее спортивное состязание. Разобьём изумруды на пары (произвольным образом). В каждой паре проведём одно взвешивание. Проигравший (более лёгкий изумруд) покидает соревнование. 16 победителей также разобьём на пары и устроим в каждой паре взвешивание. Выигравшие проходят в следующий круг. И так далее, пока «в финале» не определится самый массивный изумруд **А**.

Понятно, что второй по массе изумруд нужно искать среди тех, которые в процессе на одном из этапов встречались с **А** (поскольку для каждого из остальных есть как минимум два изумруда, которые их тяжелее – изумруд **А** и тот, которому они проиграли). Таких изумрудов 5, и с помощью 4 взвешиваний мы, очевидно, определим самого тяжёлого из них. Он и будет вторым по массе среди всех.

Осталось заметить, что всего было проведено ровно 16+8+4+2+1+4 = 35 взвешиваний.

---

3. Преподаватель физкультуры расставил 30 учеников класса по кругу так, что рядом с каждой девочкой стоят мальчик и девочка, и через одного от каждого мальчика тоже стоят мальчик и девочка. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек? Ответ обосновать.

Ответ: 20 мальчиков и 10 девочек.

Решение. Ясно, что девочки обязательно стоят парами в обрамлении мальчиков (…М**ДД**М…), поскольку и в ситуации …М**Д**М…, и в ситуации …Д**Д**Д… не выполнено первое условие для выделенной девочки **Д**.

Аналогично доказывается, что мальчики стоят четвёрками в обрамлении девочек (…Д**ММММ**Д…). Значит, по кругу пары девочек чередуются с четвёрками мальчиков. Отсюда следует ответ.

----

4. В каждой клетке квадрата 9×9 стоит ровно один солдат. Назовём клетки соседними, если они имеют общую сторону. По команде все солдаты одновременно переходят в одну из соседних клеток. Докажите, что хотя бы одна клетка при этом освободится.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску (в белый и чёрный цвета) клеток квадрата. Изначально в чёрных клетках находится 41 солдат, а в белых – 40. По команде каждый солдат, очевидно, переходит в клетку противоположного цвета, поэтому после выполнения команды в 41 чёрной клетке будет 40 солдат. Значит, хотя бы одна чёрная клетка освободится.

----

5. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению (ответ обосновать)

$$2020(y - x + 2021) = x(y + 1) + 5.$$

Ответ: $(\mathbf{2015}, -\mathbf{2020}), (\mathbf{2019}, -\mathbf{2016}), (\mathbf{2021}, -\mathbf{2026}), (\mathbf{2025}, -\mathbf{2022})$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(2020 - x)(y + 2021) = 5$ и заметим, что оба множителя являются целыми числами. Осталось заметить, что есть только четыре способа разложить число 5 на целые множители: $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$. Решая четыре системы уравнений, получаем выписанный выше ответ.

----

6. Учитель математики обещал поставить Вовочке оценку «5» за год, если тот составит из чисел 0, 1 и 2 волшебный квадрат (любого размера) так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Вовочке.

Ответ: такой квадрат составить невозможно.

Решение. Предположим, что волшебный квадрат построить можно. Пусть он имеет размер $n \times n$. Это означает, что в нём n строк, n столбцов и две большие диагонали. И все эти $(2n+2)$ чисел должны быть различными. Но суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях – это целые числа в диапазоне от 0 (если складываются n нулей) до $2n$ (в случае, если складываются n двоек). Таким образом, возможных различных сумм $2n+1$, что меньше, чем $2n+2$. Противоречие.

----

7. Известно, что ровно в 18:00 часовая и минутная стрелки обычных часов образуют развёрнутый угол. Когда они будут образовывать развёрнутый угол в следующий раз? Ответ обосновать. (Считать, что обе стрелки движутся не «скачками», а непрерывно)

Ответ: **19** ч **5$\frac{5}{11}$** **мин.**

Решение. Пусть до следующего момента, когда часовая и минутная стрелки часов образуют угол $180°$, часовая стрелка прошла угол $x°$. Тогда минутная стрелка пройдёт угол $(360+x)$ градусов. Часовая стрелка делает полный оборот за 12 часов, а минутная – за час, стало быть, угловая скорость минутной стрелки в 12 раз больше угловой скорости часовой стрелки. Значит, $360 + x = 12x$, откуда $x = \frac{360}{11}$. За 1 час минутная стрелка проходит угол $360:12 = 30°$, следовательно, угол $x°$ она пройдёт за $\frac{360}{11 \cdot 30}$ ч $= \frac{12}{11}$ ч $= 1$ ч $5\frac{5}{11}$ мин. Осталось прибавить это время к 18:00.