Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (26 сентября 2020 года) 10 класс . Краткие решения

1. Сегодня 26.09.2020 Петя пишет вступительный экзамен в ВМШ. Интересно, что дата дня рождения Пети записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Когда родился Петя? Ответ обосновать. (считать, что возраст всех поступающих в ВМШ находится в диапазоне от 12 до 17 лет)

Ответ: 22.09.2006.

Решение. Из условия задачи следует, что все поступающие должны быть рождены не ранее 2003 года и не позднее 2008 года. В этом диапазоне из исходных цифр можно собрать только 2006 год. В итоге для числа и месяца остаются только цифры 0, 2, 2, 9. Диапазон месяцев от 01 до 12, поэтому остаются только две даты – 29.02.2006 и 22.09.2006. Однако, первая из них некорректная, поскольку 2006 год не високосный (поскольку число 2006 не делится ни на 4, ни на 1000), и 29 февраля в нём не было.

---

2. Доказать, что при всех неотрицательных p, q, r выполнено неравенство $(p+q)(q+r)(r+p) \geq 8pqr$.

Решение. Для всех неотрицательных чисел p и q выполнено неравенство $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2 \geq 0$, откуда следует, что $p+q \geq 2\sqrt{pq}$ $(*)$. Аналогично, $q+r \geq 2\sqrt{qr}$ и $r+p \geq 2\sqrt{rp}$. Почленно перемножая эти неравенства, получим $(p+q)(q+r)(r+p) \geq 8pqr$, что и требовалось.

Замечание. Неравенство $(*)$ также является следствием известного неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух неотрицательных чисел.

---

3. Решить в целых числах уравнение $5xy = x^2 + 5y + 1$.

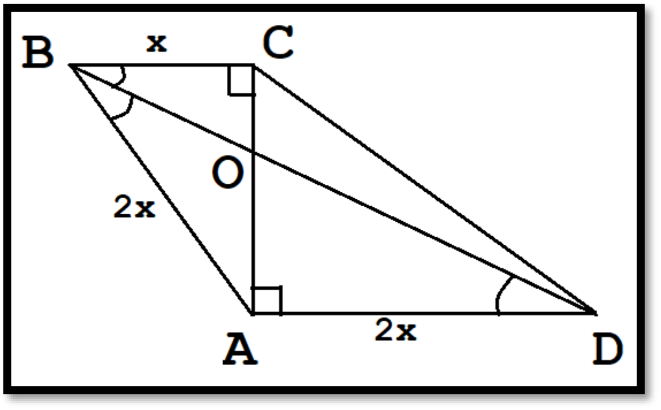
Ответ: $\{(\mathbf{2};\mathbf{1}),(\mathbf{3},\mathbf{1})\}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(5y - x - 1)(x - 1) = 2$ и заметим, что оба множителя являются целыми числами. Осталось заметить, что есть только четыре способа разложить число 2 на целые множители: $5 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = (-1) \cdot (-2) = (-2) \cdot (-1)$. В итоге получаем четыре системы уравнений, из которых только первые две дают целые решения. Эти решения и записываем в ответ.

---

4. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $2:1$, а диагонали пересекаются в точке O. Известно, что диагональ AC перпендикулярна основаниям, а диагональ BD является биссектрисой угла B. Доказать, что $AB^2 = BD \cdot AO$.

Решение. Пусть $BC = x$. Тогда $AD = 2x$. Заметим, что $\angle CBD = \angle ADB$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD). По условию $\angle ABD = \angle CBD$ (BD — биссектриса). Обозначим все три этих угла через α. В $\triangle ABD$ два угла равны, значит, $AB = AD = 2x$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. В нём $\cos 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Поэтому $2\alpha = 60°$ и $\alpha = 30°$. Но тогда $\angle BAC = 90° - 2\alpha = 30°$. Значит, равнобедренные треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle BDA$ подобны по двум углам. Равенство отношений сходственных сторон даёт нам $\frac{AB}{BD} = \frac{AO}{BA}$, откуда следует, что $AB^2 = BD \cdot AO$.



---

5. В классе 29 учеников. Петя Иванов сделал в контрольной работе 9 ошибок, а у каждого из остальных ошибок меньше. Доказать, что в классе найдутся по крайней мере 4 ученика, сделавших в контрольной работе одинаковое число ошибок.

Решение. Докажем это утверждение методом «от противного». Предположим, что четырёх человек, сделавших в контрольной работе одинаковое число ошибок, не нашлось. Тогда есть не более трёх человек, сделавших $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и 8 ошибок, соответственно. Значит, всего не более $9 \cdot 3 = 27$ человек сделало менее 9 ошибок. Однако по условию их $29 - 1 = 28$. Противоречие.

6. Известно, что ровно в 15:00 часовая и минутная стрелки обычных часов образуют прямой угол. Когда они будут образовывать прямой угол в следующий раз? Ответ обосновать. (Считать, что обе стрелки движутся не «скачками», а непрерывно)

Ответ: $\mathbf{15}$ ч $\mathbf{32\frac{8}{11}}$ **мин.**

Решение. Пусть до следующего момента, когда часовая и минутная стрелки часов образуют угол $90°$, часовая стрелка прошла угол $x°$. Тогда минутная стрелка, перегнав часовую, пройдёт угол, равный $(2 \cdot 90 + x)° = (180 + x)°$. Часовая стрелка делает полный оборот за 12 часов, а минутная – за час, стало быть, угловая скорость минутной стрелки в 12 раз больше угловой скорости часовой стрелки. Значит, $180 + x = 12x$, откуда $x = \frac{180}{11}$. За 1 час минутная стрелка проходит угол $360 : 12 = 30°$, следовательно, угол $x°$ она пройдёт за время $\frac{180}{11 \cdot 30}$ ч $= \frac{6}{11}$ ч $= 32\frac{8}{11}$ мин. Осталось прибавить это время к 15:00, и получим ответ.

---

7. Айсель выписывает числовую последовательность 1, 1022, 1023, 25, 1048, 1073, 101, … (здесь каждое число, начиная с третьего, вычисляется как остаток от деления на 2020 суммы двух предыдущих чисел). Встретится ли в этой последовательности число 1000? Ответ обосновать.

Ответ: встретится.

Решение. Заметим, что в последовательности, которую выписывает Айсель, каждое число, начиная с третьего, вычисляется однозначно по двум предыдущим.

Более того, зная два числа, стоящие рядом в этой последовательности, мы можем однозначно указать то число, которое стояло перед ними, если такое было (это следует из того, что если $a + b = c \pmod{2020}$, то $a = c - b \pmod{2020}$).

Наконец, всего существует конечное число пар остатков по модулю 2020 (а именно, их 2020^2). Значит, эта числа в этой последовательности периодически повторяются, и предпериода у этой последовательности нет. Если мы сделаем два шага назад, то получим …, 1000, 1021, 1, 1022, … В силу периодичности, число 1000 встретится и далее.