

Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу
при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(25 сентября 2021 года), 8-9 классы
Краткие решения

1. Сегодня **25.09.2021** вы пишете вступительный экзамен в ВМШ. Выяснить, можно ли в соответствующем числе **25092021** между некоторыми цифрами поставить знаки **+** или **-** (и не используя скобки) так, чтобы получилось выражение, равное **100**. Если это можно сделать **30** способами (или больше), то такой день назовём счастливым. Правда ли, что сегодня счастливый день? Ответ обосновать.

Ответ: можно; нет, это неправда.

Решение. Числовое выражение со значением **100** можно получить, например, так: **$2 + 5 - 0 + 92 + 0 + 2 - 1$** .

К сожалению, **30** способами это сделать не получится. Изложим идею доказательства.

Рассмотрим произвольную расстановку знаков **+** и **-** между некоторыми цифрами числа **25092021**, которая даёт в результате выражение, равное **100**. Число **100** чётно, а в записи числа **25092021** участвуют три нечётных цифры, поэтому в полученной алгебраической сумме ровно два нечётных слагаемых (все слагаемые не могут быть чётными, поскольку последнее из них оканчивается на **1** и, стало быть, нечётно).

Значит, помимо последнего слагаемого, в сумме должно быть ещё ровно одно нечётное слагаемое, и оно оканчивается на **5** или на **9**. Кроме того, легко видеть, что каждое слагаемое имеет не более **3** цифр, и **± 920** и **± 509** тоже не подходят (они слишком большие по модулю). В итоге имеем совсем небольшой перебор, в результате которого выясняется, что всего имеется **9** вариантов нужной расстановки знаков, что меньше **30**.

2. Доказать, что при всех **x** и **y** выполнено неравенство

$$x^2 + y^2 - x + y \geq 2xy - \frac{1}{4}.$$

Решение. Легко видеть, что данное неравенство можно переписать в виде **$(x - y - \frac{1}{2})^2 \geq 0$** , которое, очевидно, выполняется при всех **x** и **y** .

3. Злая мачеха выдала Золушке 4 мешочка (разной массы) с крупой и приказала расположить их в порядке возрастания массы. Может ли Золушка это сделать за 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? Ответ обосновать.

Ответ: да, может.

Решение. Покажем, как Золушка может упорядочить мешочки по возрастанию массы с помощью 5 взвешиваний. Сначала она проводит взвешивание 1-го и 2-го мешочка, потом – 3-го и 4-го. Затем сравниваем массы двух более тяжёлых и двух лёгких мешочков. В итоге используя 4 взвешивания Золушка найдёт самый тяжёлый и самый лёгкий мешочек. Наконец, пятым взвешиванием Золушка сравнивает массы двух оставшихся мешочков.

Замечание. Есть и другие способы упорядочить мешочки по возрастанию массы с помощью 5 взвешиваний. Например, можно тремя взвешиваниями упорядочить 3 мешочка, а место четвёртого среди них найти бинарным поиском за 2 взвешивания.

4. В Солнечном городе 51 округ, в каждом из них живёт нечётное число коротышек (в диапазоне от 11 до 101). На должность мэра претендуют всего 2 кандидата (Винтик и Шпунтик). Кандидат побеждает, если он набрал большинство голосов в большинстве округов. Какое минимальное число голосов «за» может позволить кандидату победить (при некотором раскладе)? Считать, что при голосовании явка избирателей составляет 100%. Ответ обосновать.

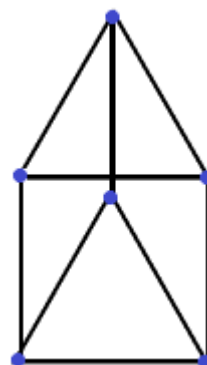
Ответ: 156 голосов.

Решение. Очевидно, 156 голосов позволят кандидату выиграть выборы в том случае, если он наберёт ровно по 6 голосов в 26 маленьких округах по 11 жителей, а в остальных округах не наберёт ни одного голоса. Если же он наберёт менее 156 голосов, то победить не сможет. Действительно, для того, чтобы набрать большинство голосов в округе, необходимо получить в нём не меньше 6 голосов избирателей. Поскольку для итоговой победы в выборах нужно победить в большинстве округов (т.е., минимум в 26-ти округах), то всего должно быть не менее $26 \cdot 6 = 156$ голосов «за».

5. Можно ли указать на плоскости шесть точек таким образом, чтобы от любой точки из этих шести ровно три из оставшихся точек располагались на расстоянии π ? Ответ обосновать.

Ответ: можно.

Решение. Рассмотрим правильную треугольную призму, все рёбра которой равны π и соединяются друг с другом шарнирами. Теперь положим все её рёбра на плоскость основания. Концами рёбер являются 6 точек (вершин), и они, очевидно, удовлетворяют условию задачи (см. рисунок справа).



Замечание. Хорошая идея – построить правильный треугольник со стороной π , параллельно перенести его на некоторый вектор длины π и соединить все вершины с их образами. Только не любой вектор подойдёт (нужно, чтобы «лишних» пар точек на расстоянии π не возникло).

6. На острове каждый житель либо Рыцарь (всегда говорит правду), либо Лжец (всегда лжёт). Во время празднования Дня независимости острова собрались все 2021 жителей. При этом каждый сказал: «Из вас больше половины Лжецов!» Сколько Лжецов на острове? Ответ обосновать.

Ответ: 1010.

Решение. Обозначим искомое количество Лжецов на острове через x . Поскольку перед каждым Рыцарем находится 2020 человек, из которых x Лжецов, то $x > \frac{2020}{2} = 1010$.

С другой стороны, каждый Лжец видит перед собой $x - 1$ Лжецов, и при этом лжёт, откуда $x - 1 \leq 1010$.

Решая полученную систему неравенств, получаем ответ.

7. Илья Муромец хочет победить Змея, 3-голового и 3-хвостого. Змей будет побеждён, если у него не останется ни голов, ни хвостов. Если богатырь одним ударом срубает голову, вырастают 2 новых хвоста, если 2 головы – вырастает новый хвост, если срубает хвост – вырастают 2 головы и 2 хвоста, если срубает одним махом 1 голову и 2 хвоста, то ничего не вырастает. При остальных ударах вырастает в точности то, что срублено. Помогите богатырю одолеть Змея. Бонус тому, кто докажет, что необходимо чётное число [результативных!] ударов.

Решение. Покажем, как Илье Муромцу победить Змея, то есть оставить его без голов и без хвостов. Алгоритм представим в виде таблицы.

№ удара	Что срубает	Голов	Хвостов
---		3	3
1	2 головы	1	4
2	1 гол., 2 хв.	0	2
3	1 хвост	2	3
4	1 хвост	4	4
5	1 голову	3	6
6	1 гол., 2 хв.	2	4
7	1 гол., 2 хв.	1	2
8	1 гол., 2 хв.	0	0

Ура! Змей повержен!

Докажем теперь, что для победы необходимо сделать чётное число ударов. Легко видеть, что **суммарное количество конечностей** Змея с каждым ударом богатыря меняется на нечётную величину (1 или 3). Поскольку изначально она была чётной ($3+3=6$ конечностей), в конце она чётна (0 – чётное число), и чётность этой величины с каждым ударом чередуется, то для победы необходимо чётное число ударов.

Ещё одна идея состоит в том, чтобы применить **шахматную раскраску** полей доски, каждое из которых соответствует паре чисел (x, y) , где x – число голов и y – число хвостов в текущий момент. С каждым ходом цвет клетки меняется на противоположный (примерно так же ходит шахматный конь, только у него больше возможных ходов). Ходы из (x, y) в (x, y) не считаются.