Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (25 сентября 2021 года),10 класс Краткие решения

1. Сегодня 25.09.2021 вы пишете вступительный экзамен в ВМШ. Интересно, что соответствующее число 25092021 **не делится** на 11. Назовём дату **редкой**, если соответствующее ей число **делится** на 11. Когда в этом календарном году была самая ранняя редкая дата и когда будет самая поздняя? Сколько всего редких дат в этом году? (Ответы обосновать. Если для получения ответа на последний вопрос использовалась компьютерная программа, привести её исходный код).

Ответ: самая ранняя дата – 02.01.2021, самая поздняя – 24.12.2021; всего 34 редких даты.

Решение. Пусть ab.cd.2021 – редкая дата. Согласно признаку делимости на 11 значение выражения $a-b+c-d+2-0+2-1$ делится на 11. Отсюда $(a-b)+(c-d)$ имеет остаток 8 при делении на 11. Число $\overline{ab}$ меняется от 01 до 31, поэтому $-9 \leq a-b \leq 3$. Аналогично, $\overline{cd}$ меняется от 01 до 12, значит, $-9 \leq c-d \leq 1$. В итоге имеем, что $(a-b)+(c-d) \in \{-3,-14\}$. Процесс дальнейшего перебора проиллюстрируем таблицей:

сумма	a-b	c-d	$\overline{ab}$	$\overline{cd}$	кол-во
-3	-4	1	04,15,26	10	3
-3	-3	0	03,14,25	11	3
-3	-2	-1	02,13,24	01,12	6
-3	-1	-2	01,12,23	02	3
-3	0	-3	11,22	03	2
-3	1	-4	10,21	04	2
-3	2	-5	20,31	05	2
-3	3	-6	30	06	1
-14	-9	-5	09	05	1
-14	-8	-6	08,19	06	2
-14	-7	-7	07,18,29	07	3
-14	-6	-8	06,17,28	08	3
-14	-5	-9	05,16,27	09	3

Из таблицы видно, что всего имеется 34 редких даты, из них самая ранняя – 02.01.2021, самая поздняя – 24.12.2021.

---

2. Злая мачеха выдала Золушке 5 мешочков (разной массы) с крупой и приказала расположить их в порядке убывания массы. Может ли Золушка это сделать за 6 взвешиваний на чашечных весах без гирь? Ответ обосновать.

Ответ: не может.

Решение. Пусть мешочки имеют массы 1, 2, 4, 8, 16 единиц массы, соответственно. Нетрудно заметить, что суммы чисел в любых двух подмножествах этого множества различны (иначе такое число будет иметь два различные двоичных представления). Очевидно, существует ровно $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов упорядочить 5 чисел. При этом в результате каждого взвешивания множество подходящих (к текущему моменту) упорядочений делится на две части (здесь мы используем тот факт, что два множества таких, как у нас, мешочков не могут иметь равные массы). Значит, в случае 6 взвешиваний в итоге получится не более $2^6 = 64$ частей, и, стало быть, в большей из них обязательно найдутся два упорядочения, которые Золушка различить не смогла (поскольку $120 > 64$). Значит, 6 взвешиваний не достаточно.

Замечание. Попробуйте доказать, что 7 взвешиваний достаточно. Другими словами, существует алгоритм из 7 взвешиваний на чашечных весах без гирь, который для любого распределения масс 5 мешочков (разной массы) позволяет расставить эти мешочки в порядке убывания массы.

---

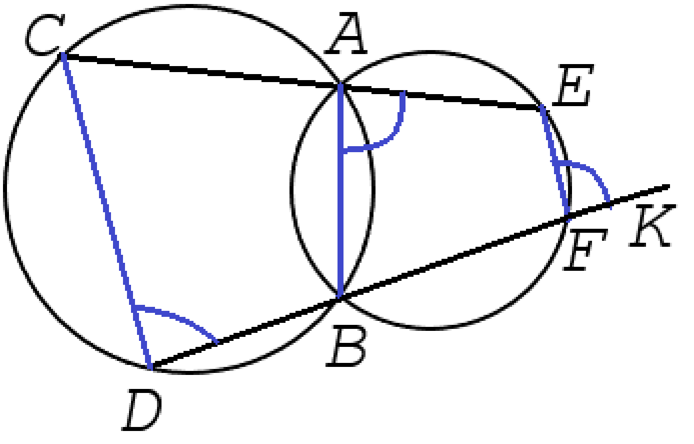
3. Решить в целых числах уравнение $2xy = (x + y)(x - y)$.

Ответ: $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$.

Решение. Данное уравнение можно переписать в таком виде:

$\left(x - y(1 + \sqrt{2})\right)\left(x - y(1 - \sqrt{2})\right) = 0$. Откуда имеем $x - y(1 + \sqrt{2}) = 0$ или $x - y(1 - \sqrt{2}) = 0$. Очевидно, если $y = 0$, то $x = 0$. Если же $y \neq 0$, то $\sqrt{2} = \pm\frac{x-y}{y}$, что невозможно в виду иррациональности числа $\sqrt{2}$.

4. Две окружности имеют общую хорду AB. Через точки A и B провели две произвольные прямые (по одной через каждую точку) так, чтобы они вторично пересекали обе окружности (в точках, отличных от A и B). Обозначим полученные точки пересечения на первой окружности через C и D, а на второй – через E и F. Доказать, что прямые CD и EF параллельны.



Решение. Пусть точки A, B, C, D соответствуют рисунку справа. Четырёхугольник $ABDC$ вписанный. Поэтому $\angle CDB = \pi - \angle BAC$.

Из свойства смежных углов имеем также

$\angle BAE = \pi - \angle BAC$.

Значит, $\angle CDB = \angle BAE$.

Аналогично, $\angle BAE = \angle EFK$. Поскольку соответственные углы $\angle CDB$ и $\angle EFK$ равны, то прямые CD и EF параллельны, что и требовалось доказать.

---

5. В Солнечном городе 51 округ, в каждом из них живёт нечётное число коротышек (в диапазоне от 11 до 101). На должность мэра претендуют всего 2 кандидата (Винтик и Шпунтик). Кандидат побеждает, если он набрал большинство голосов в большинстве округов. Какое минимальное число голосов «за» гарантирует кандидату победу (при любом раскладе)? Считать, что при голосовании явка избирателей составляет 100% и фальсификации отсутствуют. Ответ обосновать.

Ответ: 3 826 голосов.

Решение. Пусть кандидат набрал 3 836 (или более) голосов. Тогда найдутся 26 округов, в каждом из которых он набрал не менее 51 голоса (а значит, в каждом их них он победил). Действительно, если это не так, то таких округов не более 25, и тогда общее число голосов за этого кандидата будет не более $25 \cdot 101 + 26 \cdot 50 = 3\,825$ голосов. Противоречие. Значит, с 3 826 голосами кандидат точно побеждает. 3 825 голосов, очевидно, не гарантируют победу. Действительно, пусть в каждом округе живёт 101 коротышка и 3 825 голосов распределяются таким образом: в 25 округах все 101 человек голосуют за этого кандидата, а в оставшихся 26 округах он имеет меньшинство с 50 голосами против 51. Тогда победит соперник.

6. Сумма первых четырёх членов геометрической прогрессии в 6 раз больше первого члена, а сумма первых двенадцати членов равна 150. Найти сумму первого, пятого и девятого членов этой прогрессии. Ответ обосновать.

Ответ: 25.

Решение. Заметим, что в данной геометрической прогрессии знаменатель $q \neq 1$ (иначе сумма первых четырёх членов была бы больше первого члена в 4 раза, а не в 6 раз). Поэтому

$$S_5 = \frac{b_1(q^4-1)}{q-1} = 6b_1;$$

$$S_{12} = \frac{b_1(q^{12}-1)}{q-1} = \frac{b_1(q^4-1)(q^8+q^4+1)}{q-1} = 150.$$

Разделив второе на первое, имеем $q^8+q^4+1=\frac{25}{b_1}$, откуда следует, что

$$b_1+b_5+b_9 = b_1(1+q^4+q^8) = 25.$$

---

7. Доказать, что при всех a, b, c выполнено неравенство

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Решение. Будем несколько раз пользоваться известным неравенством $x^2+y^2 \geq 2xy$, которое следует из того, что $(x-y)^2 \geq 0$. Итак,

$$2a^4+2b^4+2c^4 = (a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(c^4+a^4) \geq$$

$$\geq 2a^2\,b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 = a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2) \geq$$

$$\geq 2a^2bc+2ab^2c+2abc^2.$$

Разделив всё на положительное число 2, получим требуемое.