Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу
при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(28 сентября 2019 года)
Условия задач и их краткие решения

8-9 классы

1. **Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2019.**

   Решение. Пусть для любого n = 1, 2, …, 2020 число A_n записывается (в десятичной системе счисления) с помощью n подряд идущих единиц. Поскольку всего имеется 2019 различных остатков (включая 0) при делении на 2019, найдутся два числа A_n и A_m ($n > m$), имеющие одинаковые остатки при делении на 2019. Легко видеть, что разность $A_n - A_m$ делится на 2019 и представляет собой число, в десятичной записи которого после (n-m) единиц идут m нулей. Поскольку 2019 не делится ни на 2, ни на 5, после зачёркивания всех нулей получим число из (n-m) единиц, которое делится на 2019.

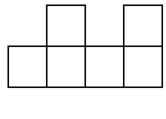
2. **На лугу пасутся овцы и гуси. Пастух обвёл глазами своё стадо и заметил про себя: «Оказывается, у нас у всех 50 голов и 120 ног!» Сколько овец и сколько гусей на лугу? Ответ обосновать.**

   Ответ: 10 овец и 39 гусей.
   Решение. Пусть на лугу пасутся x овец и y гусей. Учитывая, что у пастуха одна голова и две ноги, получим систему уравнений $x + y = 49$ и $4x + 2y = 118$, решая которую, получим $x = 10$ и $y = 39$.

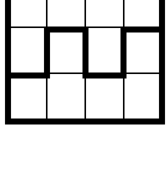
3. **На острове живут только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. За круглым столом расположились 50 островитян. 49 из них заявили: «Оба моих соседа – рыцари!» Сколько лжецов за столом? Ответ обосновать.**

   Ответ: 0, 49 или 50.
   Решение. Если хотя бы один из говоривших 49 островитян является рыцарем, то рыцарями будут и его соседи, и соседи его соседей, и т.д. Таким образом, в этом случае рыцарями будут все 50 человек, а значит, всего будет 0 лжецов.
   В противном случае, очевидно, все 49 говоривших будут лжецами. Что же касается того островитянина, который промолчал, он может быть и рыцарем, и лжецом (**проверьте это!**). Значит, в этом случае лжецов будет 49 или 50.

4. **Можно ли из шестиклеточных фигур, показанных на рисунке справа, сложить какой-нибудь квадрат? Фигуры можно поворачивать и переворачивать. Ответ обосновать.**



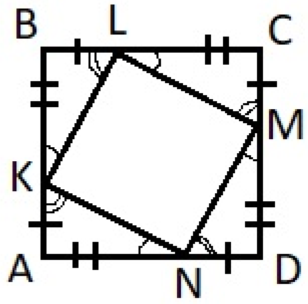
   Ответ: можно.
   Решение. Сначала можно из двух шестиклеточных фигур сложить прямоугольник 3 × 4, как показано на рисунке справа. Затем из 12 таких прямоугольников, располагая их (не поворачивая) в четыре горизонтальных ряда по три штуки, можно сложить квадрат 12 × 12.



5. **Лиса Алиса и Кот Базилио играют в азартную игру. У каждого вначале по 2019 монет. Игроки по очереди делают ход, который заключается в том, что сопернику нужно отдать некоторое число *n* своих монет. Числа *n* не должны повторяться. Отдавать 0 монет или нецелое число монет запрещено. Первый ход делает Кот Базилио. Проигрывает тот, кто первым повторит чей-то ход. Кто победит при правильной игре (каждый хочет выиграть, и выбирает для этого лучшую стратегию)? Ответ обосновать.**

Ответ: Победит Лиса Алиса.
Решение. Опишем стратегию, позволяющую Лисе Алисе выиграть вне зависимости от ходов Кота Базилио. Разобьём все возможные в качестве хода числа на пары следующим образом: (1, 2), (3, 4), (5, 6), …, (2·2019-1, 2·2019). Лисе Алисе следует на любой ход Кота отвечать (другим) числом из той же пары. Очевидно, при этом Лиса никогда не повторит ход, значит, при любом раскладе, проиграет Кот.
Осталось обосновать, почему у Лисы всегда найдётся необходимое для ответного хода число монет. Вначале у Лисы было 2019 монет. Если Лиса Алиса будет следовать данной стратегии, после каждого парного хода число монет у неё может уменьшиться максимум на 1. Значит, число монет у Лисы может стать равным 0 только через 2019 парных ходов, и в этом случае Кот, очевидно, уже походить ничего нового не сможет. До 2019 хода у Лисы на руках перед ходом Кота будет хотя бы одна монета, а значит, она точно сможет сделать ответный ход (она возвращает всегда максимум на 1 монету больше, чем ей перед этим даёт Кот).
Замечание. Интересно, что описанная выигрышная стратегия (у Лисы) – не единственная. Например, вполне логичная стратегия жадной Лисы, которая заключается в том, чтобы отдавать наименьшее возможное (не использованное ранее в качестве хода) число монет, также является выигрышной (**докажите это!**).

6. **Докажите, что любой квадрат можно разрезать на четыре равных неравнобедренных треугольника и квадрат меньшего размера.**



Решение. Разобьём каждую сторону квадрата ABCD на три равные части, и соединим полученные точки K, L, M, N так, как показано на рисунке. Очевидно, прямоугольные треугольники являются равными (по двум катетам) и неравнобедренными. Докажем, что четырёхугольник KLMN, расположенный внутри – квадрат. Действительно, все его стороны равны (это гипотенузы равных прямоугольных треугольников). Кроме того, его углы прямые, так как каждый из ник равен 180º-α-β, где α и β – острые углы прямоугольных треугольников (сумма которых равна 90º). Значит, это прямоугольник с равными сторонами, то есть квадрат.

7. **Докажите, что при всех натуральных *n* > 1 справедливо двойное неравенство**

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + ... + \frac{1}{n+1} < 1.$$

Решение. Поскольку каждое из n слагаемых меньше, чем $\frac{1}{n}$, сумма будет меньше, чем $\frac{n}{n} = 1.$ С другой стороны, каждое из n слагаемых, кроме первого, больше $\frac{1}{2n}$. Поэтому их сумма больше, чем $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Двойное неравенство доказано.

Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу
при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(28 сентября 2019 года)
Условия задач и их краткие решения

10 класс

1. **Разложите на множители выражение** $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.
   Ответ: $3(a-b)(b-c)(c-a)$.
   Решение. Используя формулы сокращённого умножения для суммы двух кубов или для куба разности, и подвергая полученные выражения группировке (**сделайте это!**), легко получить, что $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.
   Есть и другие способы решения.

2. **Расстояние между Атосом и Портосом, скачущими с постоянными скоростями по одной прямолинейной дороге, равно 40 лье. За час Атос покрывает 5 лье, а Портос – 6 лье. Какое расстояние будет между ними через час? Ответ обосновать.**

   Ответ: 29, 39, 41 или 51 лье.
   Решение (идея). Самое сложное в этой задаче – увидеть, что возможны четыре варианта распределения направлений движения мушкетёров (вдоль прямолинейной дороги), каждое из которых даёт своё число в ответе. **Решите задачу сами!** 😊

3. **Докажите для всех ненулевых *a* и *b*, что если верно неравенство** $ab>0$, **то верно и неравенство** $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2\geq 4$.

   Решение. Заметим, что $(a+1/b)^2+(b+1/a)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}$.

   Поскольку при ненулевых a и b каждая из двух первых скобок не меньше 2 (неравенство о сумме взаимно обратных величин), третья скобка положительна, и $ab>0$ по условию задачи, получим, что данная сумма не меньше, чем 2 + 2 + 0 = 4.

   Замечание 1. Есть много других способов доказать это утверждение.
   Замечание 2. Если вместо 4 в условии задачи написать число 8, получим более сильное неравенство, которое также выполнено при всех ненулевых *a* и *b* (**докажите это!**) и обращается в равенство при *a* = *b* = 1 и при *a* = *b* = -1 и только при таких *a* и *b*.

4. **Внутри единичного квадрата произвольно выбрали 51 точку. Докажите, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса 1/7.**

   Решение (идея). Поделим каждую сторону единичного квадрата на 5 равных частей и разобьём этот квадрат прямыми, проходящими через полученные точки и параллельными сторонам квадрата, на 25 одинаковых квадратиков со стороной 1/5. Легко доказать (используя известный принцип Дирихле, или просто методом «от противного»), что при любом выборе 51 точки внутри единичного квадрата среди этих 25 квадратиков найдётся такой, который содержит не менее трёх выбранных точек. Осталось заметить, что квадратик со стороной 1/5 можно накрыть целиком кругом радиуса 1/7 (**проверьте это!**). Обоснование сводится к проверке справедливости числового неравенства 1/49 > 1/50.

5. **Докажите, что** $(1\cdot 2)^{-1}+(2\cdot 3)^{-1}+...+(2018\cdot 2019)^{-1}<1.$

Решение.
Первый способ. Нетрудно проверить, что при всех натуральных $n > 1$ справедливо равенство $(n\cdot(n+1))^{-1} = 1/n - 1/(n+1)$. Применяя данное тождество ко всем слагаемым, получим $(1\cdot 2)^{-1} + (2\cdot 3)^{-1} + (3\cdot 4)^{-1} +\ldots+ (2018\cdot 2019)^{-1} = 1/1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 - 1/4+ +\ldots+ 1/2018 - 1/2019 = 1 - 1/2019 < 1$.

Второй способ (идея). Решить задачу помогает метод математической индукции. Только доказывать нужно не $(1\cdot 2)^{-1}+(2\cdot 3)^{-1}+...+(n\cdot(n+1))^{-1}<1$ (сделать это по индукции не получится, так как значение выражения в левой части растёт с ростом числа слагаемых, а единица – нет), а «более сильное» тождество $(1\cdot 2)^{-1}+(2\cdot 3)^{-1}+...+(n\cdot(n+1))^{-1}=n/(n+1)$. **Докажите это!**

6. **На доске 2019 × 5000 клеток двое по очереди отмечают квадрат по линиям сетки (любого размера) и закрашивают его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выигрывает при правильной игре (каждый хочет выиграть, и выбирает для этого лучшую стратегию)? Ответ обосновать.**

Ответ: выигрывает первый игрок.
Решение. Проведём прямую ℓ, которая поделит доску на два равных прямоугольника размера 2019 × 2500. Очевидно, эта прямая проходит по линиям сетки и является осью симметрии доски. Чтобы выиграть, первому игроку достаточно первым ходом закрасить квадрат 2018 × 2018, центр которого лежит на прямой ℓ, а затем в ответ на каждый ход второго игрока закрашивать симметричный относительно прямой ℓ квадрат. (**сделайте рисунок самостоятельно!**) Заметим, что число 2018 чётное, поэтому после первого хода первого игрока каждый квадрат на доске, который можно закрасить, целиком лежит либо левее прямой ℓ, либо правее. Поэтому у первого игрока на любой ход соперника всегда будет ответный ход, а значит, он выиграет.

7. **При каких натуральных *n* значение следующего выражения**

$$\frac{13n+8}{n-5}$$

является целым числом?

Ответ: при n = 4; 6 или 78.
Решение. Выделим целую часть дроби: $\frac{13n+8}{n-5}=\frac{13n-65+73}{n-5}=13+\frac{73}{n-5}$.

В силу того, что 73 простое число, а $(n-5)$ – целое число, значение данного выражения будет целым числом если, и только если $(n-5)\in\{1;-1;73;-73\}$. Откуда $n\in\{6;4;78;-68\}$. Учитывая, что по условию число n должно быть натуральным, вариант $n = -68$ не подходит.

Благодарим Вас за интерес к математике и к ВМШ при ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова!