Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу
при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(29 сентября 2018 года)

8-9 классы

1. **Команды «Математики», «Физики» и «Программисты» сыграли в футбол 2018 матчей (в каждом матче принимают участие две команды из трёх). За выигрыш, как обычно, команда получает 3 очка, за ничью 1 очко и за проигрыш ничего не получает. Все три команды в сумме набрали 5900 очков. Сколько было ничьих? Ответ обосновать.**

   Ответ: 154.
   Решение.
   Первый способ. Если бы ничьих не было, то в каждой игре разыгрывались бы три очка, и поэтому было бы набрано $3\cdot 2018=6054$ очков. При каждой ничье разыгрывается на одно очко меньше (два вместо трёх), поэтому ничьих было $6054-5900=154$.
   Второй способ. Пусть всего было сыграно x ничьих и y результативных партий. Тогда $x+y=2018$ и $2x+3y=5900$. Если первое равенство умножить на 3 и вычесть из него почленно второе, получим $x=154$.

2. **К произведению трёх последовательных простых чисел прибавили целую степень числа 2, и сумму удвоили. Могло ли получиться число 2018? Ответ обосновать.**

   Ответ: могло.
   Решение. Легко проверить, что $(7\cdot 11\cdot 13+2^3)\cdot 2=2018$.
   Замечание. Как найти решение? Пусть p_1, p_2, p_3 – последовательные простые числа. Ясно, что $p_1p_2p_3<1009$ (это половина от 2018). Данному ограничению удовлетворяют только четыре тройки p_1, p_2, p_3 – это $2\cdot 3\cdot 5$, $3\cdot 5\cdot 7$, $5\cdot 7\cdot 11$ и $7\cdot 11\cdot 13$. Проверкой убеждаемся, что (только) четвёртый вариант удовлетворяет условию задачи.

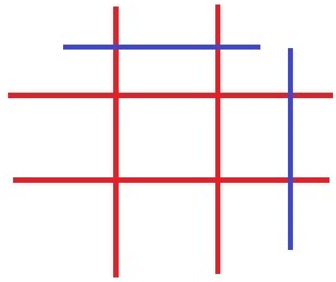
3. **У Пети в школе всего три предмета – математика, физика и информатика. Школа работает без выходных и праздников, и каждый день Петя получает одну оценку (2,3,4 или 5) по каждому предмету. Родители хвалят Петю, если по большинству предметов сегодня оценки лучше, чем вчера. Какое наибольшее количество дней подряд Петю могут хвалить?**

   Ответ: Петя может сделать так, что хвалить его будут бесконечно (точнее, пока он не закончит школу).
   Решение. Пусть Петя получает в школе такие оценки:

   1 день: 2; 3; 4
   2 день: 3; 4; 2
   3 день: 4; 2; 3
   4 день: 2; 3; 4
   ………………

   Как видим, оценки в 4-й и в 1-й день повторились (зациклились), поэтому продолжая эту периодическую последовательность (с периодом 3), Петя легко добивается того, что его хвалят каждый день. При этом даже не обязательно быть отличником.
   Замечание. Решения с неверным ответом не засчитывались, а решения с правильным ответом, но недостаточным обоснованием засчитывались частично.

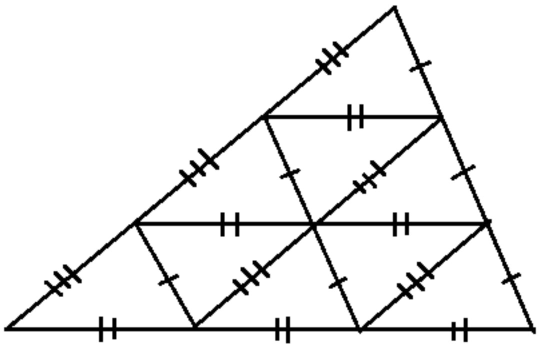
4. **Можно ли на плоскости нарисовать синие и красные отрезки так, чтобы синие отрезки не пересекались, а каждый красный отрезок пересекал ровно два красных отрезка и один синий? Ответ обосновать.**



Ответ: можно.
Решение. Один из вариантов показан на рисунке (есть много других).

5. **Как можно разрезать произвольный треугольник на девять равных треугольников?**

Решение. Разделим каждую сторону треугольника на три равные части, и соединим полученные точки так, как показано на рисунке. Получим 9 равных треугольников.

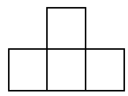


Замечание 1. Доказывать равенство полученных 9 треугольников не требовалось (считалось, что это очевидно), хотя некоторые участники олимпиады это делали (молодцы!)
Замечание 2. Решение, в котором использовалось, что треугольник равносторонний, равнобедренный или прямоугольный, засчитывалось только частично (поскольку это решение задачи только для частного случая).

6. **На столе лежат 2018 монет. Лиса Алиса и Кот Базилио по очереди берут со стола по несколько монет – одну, три или пять. Первый ход делает Алиса. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету. Кто победит при правильной игре (каждый хочет выиграть, и выбирает для этого лучшую стратегию)? Ответ обосновать.**

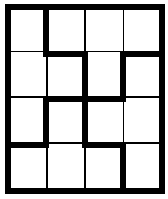
Ответ: Кот Базилио.
Решение. Отметим, что пока монеты на столе остались, у игроков всегда есть ход (одну монету можно взять всегда). Легко видеть, что, поскольку числа 1,3 и 5 нечётные, чётность числа оставшихся на столе монет с каждым ходом меняется на противоположную. Вначале на столе лежит чётное число монет (2018). Значит, 0 монет на столе останется после хода Кота Базилио, то есть он выигрывает при любом развитии игры.

7. **Можно ли из четырёхклеточных фигурок, показанных на рисунке справа, сложить (без наложений) квадрат 1) 6х6; 2) 8х8; 3) 9х9? Фигурки можно поворачивать. Ответ обосновать.**



Ответ: 1) нельзя; 2) можно; 3) нельзя.
Решение. 1) Раскрасим клетки квадрата 6х6 в два цвета в шахматном порядке. Предположим, что его разрезать на такие фигурки можно. Тогда, очевидно, каждая фигурка имеет либо 3 чёрных клетки и 1 белую, либо, наоборот, 3 белых и одну чёрную. Обозначим количество фигурок первого типа через x, а второго – через y. Тогда всего фигурок $x+y=9$ (36 клеток всего, по 4 в каждой фигурке), и количество чёрных клеток равно $3x+y=18.$ Откуда $2x=9;$ и $x=4,5,$ что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что и сложить квадрат 6х6 нельзя.

2) На рисунке 3 показано, как можно сложить квадрат 4х4. Далее из 4 квадратов 4х4 складываем квадрат 8х8.



3) Нельзя, потому что в каждой фигурке 4 клетки, а количество клеток квадрата 9х9 равно 81 и не делится на 4.

10 класс

1. **На своей планете Маленький принц сначала прошёл 100 шагов на юг, потом 100 шагов на запад и, наконец, 100 шагов на север. Мог ли он оказаться в результате в исходной точке? Если да, то примести пример, если нет, доказать, что не мог.**

   Ответ: мог.

   Решение. Пусть планета имеет форму шара, у которого длина экватора (и любого меридиана) больше 200 шагов (например, 400 шагов), а Маленький принц изначально был на северном полюсе. Тогда, пройдя 100 шагов на ют, принц сворачивает налево (с меридиана на параллель), проходит по параллели 100 шагов на запад, и, наконец, пройдя 100 шагов на север, возвращается в исходную точку – на северный полюс.

   Замечание 1. Второй вариант – выбрать начальную точку, расположенную на 100 шагов севернее параллели длины $\frac{100}{n}$ шагов (той параллели, которая ближе к южному полюсу), где n – любое натуральное число.

   Замечание 2. Решения, в которых предлагалось планете иметь экватор в 100 шагов, не засчитывались, поскольку в этом случае Маленький принц не сможет 100 шагов двигаться ни на юг, ни на север (по крайней мере, если планета имеет форму шара или близкую к шару).

2. **Разложите на множители выражение** $2x^2+xy-y^2+3y-2$.

   Решение. $2x^2+xy-y^2+3y-2=2x^2+(2xy-xy)+(2x-2x)-y^2+(2y+y)-2=$
   $=(2x^2+2xy-2x)-(xy+y^2-y)+(2x+2y-2)=(x+y-1)(2x-y+2).$

   Замечание. Помимо группировки, разложение на множители можно получить методом неопределённых коэффициентов или с помощью теоремы о разложении квадратного трёхчлена на множители (рассматривая данное выражение как квадратный трёхчлен, например, относительно переменной x).

3. **На кафедре 21 преподаватель. Известно, что среди любых трёх преподавателей хотя бы двое работали в одной экзаменационной комиссии. Доказать, что найдётся преподаватель, работавший в одной экзаменационной комиссии не менее чем с десятью другими (возможно, в разное время).**

   Решение. Переформулируем задачу на языке теории графов:

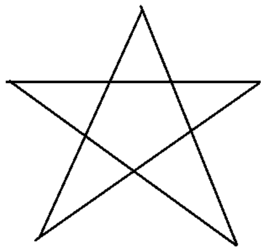
   В графе 21 вершина. Известно, что среди любых трёх вершин обязательно найдутся две смежные (соединённые ребром). Доказать, что в графе найдётся вершина степени не менее 10.

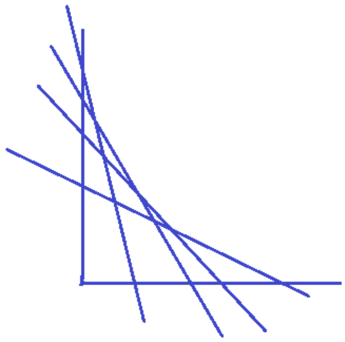
   Докажем это утверждение.

   Первый способ. Предположим противное. Пусть степень каждой вершины графа не превышает 9. Возьмём любую вершину u. Из неё выходят не более 9 рёбер, а остальных вершин 20. Значит, найдётся вершина v, не смежная с u. Количество вершин, смежных хотя бы с одной из этих двух вершин, не более чем 9+9=18. А всего вершин 21. Значит, найдётся вершина w, отличная от вершину u и v и не смежная с ними (поскольку 21 > 2 + 18). В итоге среди трёх вершин u, v и v нет смежных, что противоречит условию задачи.

Второй способ. Возьмём любую вершину v. Если её степень больше 9, то она искомая. Если нет, то найдётся множество M из 11 вершин, с которыми вершина v не смежна. Очевидно, в множестве M все вершины попарно смежны (действительно, если вершины a и b из M не смежны, то среди трёх вершин v, a и b исходного графа нет смежных, что противоречит условию). Значит, каждая вершина из M имеет степень как минимум 10. Утверждение доказано.

4. **Можно ли расположить на плоскости 1) пять; 2) шесть одинаковых отрезков так, чтобы каждые два из них имели общую точку [причём никакие три отрезка общей точки не имели]? Ответ обосновать.**





Ответ: можно.

Решение. Примеры см. на рисунках, расположенных справа. Есть много других примеров.

Замечание. Условие в квадратных скобках, было, к сожалению, пропущено в напечатанном варианте. Оно было объявлено в аудитории, где проходил экзамен у 10 класса. Поэтому решения, в которых это условие не соблюдалось (например, где рисовались 5 и 6 отрезков, проходящих через одну точку), засчитывались только наполовину.

5. **Найти наименьшее натуральное число, которое делится (нацело) на 20 и на 18, десятичная запись которого начинается на 2018. Ответ обосновать.**

Ответ: 2018160.

Решение. Обозначим через N искомое число. N делится на 20, поэтому его десятичная запись оканчивается на 0, а предпоследняя цифра чётная. Кроме того, N делится на 9, поэтому (согласно признаку делимости на 9) сумма цифр числа N делится на 9. Значит, сумма оставшихся цифр (тех, которые следуют за 2018) имеет остаток 7 при делении на 9. Из этого можно сделать вывод, что ни число 20180, ни числа вида $\overline{2018a0}$ не подходят. Значит, число N как минимум 7-значное. Если в N ровно 7 цифр, то оно имеет вид $\overline{2018ab0}$, где $a+b$ имеет остаток 7 при делении на 9 и b – чётная цифра. Очевидно, наименьшее число $\overline{ab}$, удовлетворяющее этим условиям, равно 16, при этом получим N = 2018160.

6. **У студентов были две пересдачи (на вторую пересдачу приходят те, кто не получил зачёт на первой). На первой пересдаче зачёт получила четверть всех пришедших студентов и ещё четвёртая часть студента. На второй пересдаче также зачёт получила четверть всех пришедших студентов и ещё четвёртая часть студента. Какое наименьшее число студентов могло прийти на первую пересдачу? Ответ обосновать.**

Ответ: 15.

Решение. Пусть x человек пришли на первую пересдачу. Тогда сдали зачёт в первый раз $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}=\frac{x+1}{4}$ студентов. Значит, во второй раз пришли $x-\left(\frac{x+1}{4}\right)=\frac{3x-1}{4}$ человек.

После второй пересдачи количество не сдавших зачёт равно $\dfrac{3\left(\dfrac{3x-1}{4}\right)-1}{4}=n,$ где n – целое число. Из последнего равенства найдём $x=\dfrac{16n+7}{9}.$ Поскольку x тоже целое, $16n+7$ должно делиться на 9. Очевидно, наименьшее x получим при наименьшем $n,$ а наименьшее $n,$ при котором $16n+7$ делится на 9, равно 8. В итоге $x=\dfrac{16\cdot 8+7}{9}=15.$ Проверкой убеждаемся, что данное значение подходит.

7. **Имеется множество всех 16-ричных наборов длины три – от 000 до FFF. Назовём два набора соседними, если они отличаются только в одной позиции (например, наборы 5A2 и 512 – соседние, а 5A2 и 52A – нет). Какое наибольшее количество попарно не соседних наборов можно выбрать из этого множества? Ответ обосновать.**

Ответ: 256.
Решение. Разобьём все указанные наборы на 256 групп. В первую группу поместим 16 наборов, начинающихся на **00** (от **000** до **00F**), во вторую – 16 чисел, начинающихся на **01** (от **010** до **01F**), …, в последнюю – 16 чисел, начинающихся на **FF** (от **FF0** до **FFF**). Поскольку в каждой группе наборы попарно соседние, то всего попарно не соседних наборов из данного большого множества можно выбрать не более 256 штук.
Покажем теперь, как выбрать по одному набору из каждой группы так, чтобы выбранные наборы были попарно не смежными. Заметим, что в каждой группе у наборов суммы 16-ричных цифр идут последовательно. Значит, среди них обязательно найдётся та, которая делится на 16. Вот соответствующий набор и возьмём (в первой группе это набор **000**, во второй – набор **01F**, …, в последней – **FF2**). Очевидно, различные наборы с равной суммой цифр не могут отличаться только в одной цифре, то есть они не могут быть соседними. Значит, выбранные 256 наборов удовлетворяют условию задачи.

P.S. Пункты задач (номер 7 в варианте для 8-9 классов и номер 4 в варианте для 10 класса, соответственно) оценивались как **самостоятельные задачи**. В итоге в 8-9 классах можно было максимально решить 9 задач, а в 10 классе – 8 задач.